Esercizio 1: Consideriamo la catena di Markov $Y = \{Y_n, n \in \mathrm{N}\}$ riportata in Figura 1.1. Il candidato:

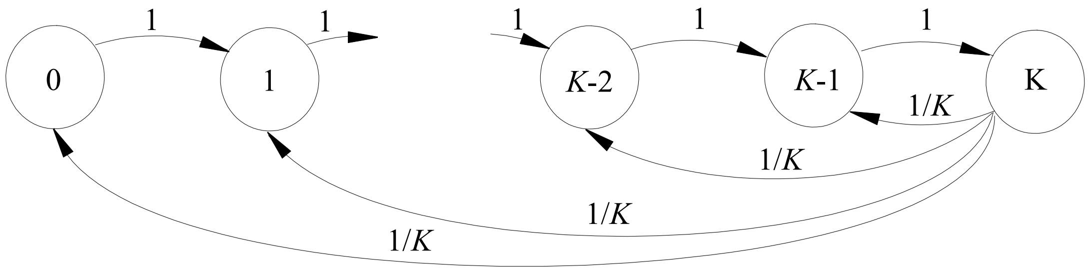

Figura 1.1: Diagramma delle probabilità di transizione

1. classifichi gli stati della catena e ne calcoli le probabilità stazionarie di stato $\{\pi_i, i = 0, 1, 2, \ldots, K\}$.

Supponiamo adesso che la catena $Y = \{Y_n, n \in \mathrm{N}\}$ modelli il servente di un sistema M/G/1 nel modo seguente: detta X la v.a. discreta che rappresenta il tempo di servizio del servente, sia $\pi_k = P\{X = k\}$, $0 \le k \le K$. Supponendo che i pacchetti arrivino con tasso costante λ il candidato:

2. ricavi la condizione di stabilità e calcoli il numero medio di pacchetti nel sistema.

Supponiamo infine che $Y = \{Y_n, n \in \mathrm{N}\}$ sia la catena modulante di un processo di generazione dei pacchetti così caratterizzato: ogni volta che la catena visita lo stato $\{k\}$, $0 \le k \le K$, il processo emette $k+1$ pacchetti. Il candidato:

3. calcoli il numero medio $E[A]$ di pacchetti emessi dal processo nell'unità di tempo.

Risoluzione

1. La catena è irriducibile in quanto tutti gli stati comunicano tra loro. Essa è inoltre aperiodica in quanto è facile constatare che, se prendiamo per esempio lo stato K, il massimo comune divisore degli $\{n | p_{KK}^{(n)} > 0\}$ è 1. Poiché la catena è finita essa è ricorrente positiva. Per calcolare le probabilità stazionarie di stato incominciamo a scrivere la matrice delle probabilità di transizione P che risulta essere di dimensione $K+1$.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \frac{1}{K} & \frac{1}{K} & \frac{1}{K} & \dots & \frac{1}{K} & 0 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Per calcolare le $\{\pi_i, i = 0, 1, 2, \dots, K\}$ dobbiamo risolvere il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} P \\ \boldsymbol{\pi} \times \mathbf{e} = 1 \end{cases} \tag{1.2}$$

Il sistema (1.2) può essere riscritto nella seguente forma estesa

$$\begin{cases} [\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{K-1}, \pi_K] = [\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{K-1}, \pi_K] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \frac{1}{K} & \frac{1}{K} & \frac{1}{K} & \dots & \frac{1}{K} & 0 \end{bmatrix} \\ \sum_{k=0}^{K} \pi_k = 1 \end{cases} \tag{1.3}$$

Incominciamo a sviluppare l’equazione matriciale del sistema (1.3).

$$
\begin{cases}
\pi_0 = \frac{1}{K}\pi_K \\
\pi_1 = \pi_0 + \frac{1}{K}\pi_K \\
\pi_2 = \pi_1 + \frac{1}{K}\pi_K \\
\dots \\
\pi_{K-1} = \pi_{K-2} + \frac{1}{K}\pi_K \\
\pi_K = \pi_{K-1}
\end{cases}
\tag{1.4}
$$

Per sostituzioni successive, il sistema (1.4) può essere riscritto

$$
\begin{cases}
\pi_K = K\pi_0 \\
\pi_1 = 2\pi_0 \\
\pi_2 = 3\pi_0 \\
\dots \\
\pi_{K-1} = K\pi_0 \\
\pi_K = K\pi_0
\end{cases}
\tag{1.5}
$$

ovvero, nella seguente forma compatta

$$
\begin{cases}
\pi_k = (k+1)\pi_0 \qquad k = 0, 1, \dots,(K-1) \\
\pi_K = K\pi_0
\end{cases}
\tag{1.6}
$$

La prima e l'ultima equazione del sistema (1.5) sono identiche. Questo non ci sorprende in quanto dalla teoria è noto che il sistema di equazioni (1.4) è linearmente dipendente. L'ultima (o, equivalentemente, la prima) equazione del sistema (1.5) la sostituiamo perciò con la condizione di normalizzazione, ossia con la seconda equazione del sistema (1.3)

$$\pi_0[1 + 2 + 3 + \dots + K + K] = 1 \tag{1.7}$$

ossia

$$\pi_0 \sum_{k=0}^{K} k + K\pi_0 = \pi_0\left[\frac{K(K+1)}{2} + K\right] = 1 \tag{1.8}$$

La (1.8), dopo alcuni passaggi algebrici, fornisce

$$\pi_0 = \frac{2}{K(K+3)} \tag{1.9}$$

Sostituendo la (1.9) nella (1.6) si ottengono le probabilità stazionarie di stato

$$\begin{cases} \pi_k = \dfrac{2(k+1)}{K(K+3)} & k = 0, 1, \ldots, (K-1) \\ \pi_K = \dfrac{2}{K+3} \end{cases} \tag{1.10}$$

2. Per il calcolo di $E[N]$ bisogna calcolare b e $b^{(2)}$.

(i) Calcolo di b

$$b = \sum_{k=0}^{K} k\pi_k = \sum_{k=0}^{K-1} k\pi_k + K\pi_K \tag{1.11}$$

Sostituendo le (1.10) nella (1.11), dopo alcuni passaggi algebrici otteniamo

$$b = \frac{2}{K(K+3)}\left[\sum_{k=0}^{K-1} k^2 + \sum_{k=0}^{K-1} k\right] + \frac{2K}{K+3} \tag{1.12}$$

Sostituendo i seguenti risultati

- $\sum_{k=0}^{K-1} k^2 = \frac{(K-1)(K)[2(K-1)+1]}{6}$
- $\sum_{k=0}^{K-1} k = \frac{K(K-1)}{2}$

nella (1.12), dopo alcuni passaggi algebrici otteniamo

$$b = \frac{2}{3} \cdot \frac{K^2 + 3K - 1}{K+3} \tag{1.13}$$

La condizione di stabilità del sistema risulta perciò

$$\rho = \lambda b = \frac{2\lambda}{3} \cdot \frac{K^2 + 3K - 1}{K+3} < 1 \tag{1.14}$$

(ii) Calcolo di $b^{(2)}$

$$b^{(2)} = \sum_{k=0}^{K} k^2 \pi_k = \sum_{k=0}^{K-1} k^2 \pi_k + K^2 \pi_K \tag{1.15}$$

Sostituendo le (1.10) nella (1.15), dopo alcuni passaggi algebrici otteniamo

$$b^{(2)} = \frac{2}{K(K+3)}\left[\sum_{k=0}^{K-1} k^3 + \sum_{k=0}^{K-1} k^2\right] + \frac{2K^2}{K+3} \tag{1.16}$$

Sostituendo i seguenti risultati

- $\sum_{k=0}^{K-1} k^2 = \frac{(K-1)(K)[2(K-1)+1]}{6}$
- $\sum_{k=0}^{K-1} k^3 = \left[\frac{K(K-1)}{2}\right]^2$

nella (1.16), dopo alcuni passaggi algebrici otteniamo

$$b^{(2)} = \frac{3K^3 + 10K^2 - 3K + 2}{6(K+3)} \tag{1.17}$$

Per il calcolo del numero medio di pacchetti nel sistema, basta sostituire la (1.14) e la (1.17) in

$$E[N] = \rho + \frac{\lambda^2 b^{(2)}}{2(1-\rho)} \tag{1.18}$$

3. Per il calcolo di $E[A]$ si procede come segue

$$E[A] = \sum_{k=0}^{K} E[A|k]\pi_k \tag{1.19}$$

D'altra parte

$$E[A|k] = k+1 \tag{1.20}$$

in quanto il numero di pacchetti emessi quando la catena visita lo stato $\{k\}$ è costante e pari a k+1. Sostituendo le (1.10) e (1.20) nella (1.19)

$$E[A] = \frac{2}{K(K+3)}\sum_{k=0}^{K-1} (k+1)^2 + \frac{2(K+1)}{K+3}$$

$$= \frac{2}{K(K+3)}\sum_{h=1}^{K} h^2 + \frac{2(K+1)}{K+3}$$

$$= \frac{2}{K(K+3)}\frac{K(K+1)(2K+1)}{6} + \frac{2(K+1)}{K+3} \qquad (1.21)$$

Dopo alcuni passaggi algebrici, la (1.21) conduce al seguente risultato

$$E[A] = \frac{K+1}{3(K+3)}(2K+7) \qquad (1.22)$$