Esercizio 1: Si consideri un router di Internet nel quale i pacchetti arrivano secondo un processo di Poisson di tasso

$$\lambda_n = \begin{cases} \dfrac{N-n}{N(n+1)} & n < N \\ 0 & n \geq N \end{cases} \tag{1.1}$$

dipendente dal numero n di pacchetti nel sistema. Supponiamo che il router abbia una linea di uscita ed indichiamo con μ il tasso della distribuzione esponenziale che descrive i tempi di trasmissione dei pacchetti su tale linea. Il candidato:

1. disegni il diagramma dei tassi di transizione del sistema M/M/1 che modella il suddetto router;
2. ricavi la condizione di stabilità e le probabilità stazionarie di stato;
3. ricavi la distribuzione osservata da un pacchetto in arrivo;
4. ricavi il throughput, il carried load e l'offered load partendo dalle relative definizioni;
5. ricavi il numero medio $E[N]$ di pacchetti nel sistema ed il tempo medio di risposta $E[R]$ del medesimo.

Nota. Durante lo svolgimento dell'esercizio può essere utile ricordare che:

(i) $k\binom{N}{k} = N\binom{N-1}{k-1}$

(ii) $\dfrac{N(N-1)(N-2)\cdot\ldots\cdot(N-k+1)}{k!} = \binom{N}{k}$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\frac{1}{x^k} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^N$

(iv) $\left(\dfrac{N-j}{j+1}\right)\binom{N}{j} = \binom{N}{j+1}$

(v) $k\binom{N}{k} = N\binom{N-1}{k-1}$

RISOLUZIONE

1. Il diagramma dei tassi di transizione è riportato in Figura 1.1.

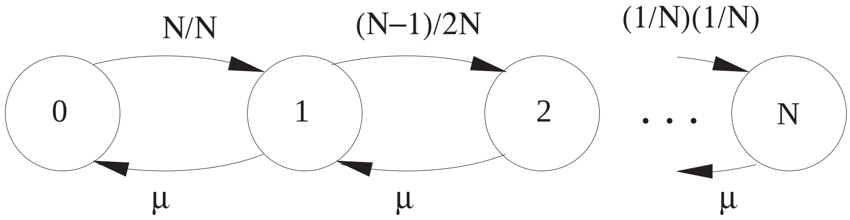

Figura 1.1: Diagramma dei tassi di transizione

2. Per il calcolo delle probabilità stazionarie di stato si utilizza la relazione

$$p_k = \frac{\lambda_o \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k} p_0 \,,\ k \geq 1 \tag{1.2}$$

Sostituendo la (1.1) nella (1.2) si ottiene

$$p_k = \frac{1}{\mu^k} \cdot \frac{N}{N} \cdot \frac{N-1}{2N} \cdot \frac{N-2}{3N} \cdot \ldots \cdot \frac{N-k+1}{kN} p_0 \tag{1.3}$$

Dopo semplici manipolazioni algebriche

$$p_k = \frac{1}{(\mu N)^k} \cdot \frac{N(N-1)(N-2) \cdot \ldots \cdot (N-k+1)}{k!} p_0 \tag{1.4}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore della (1.4) per $(N-k)!$ si ottiene

$$p_k = \binom{N}{k} \frac{1}{(\mu N)^k} p_0 \ \ ,\ 1 \leq k \leq N \tag{1.5}$$

Il calcolo di p_0 viene effettuato utilizzando la condizione di normalizzazione

$$\sum_{k=0}^{N} p_k = 1 \tag{1.6}$$

Sostituendo le probabilità (1.5) nella (1.6) si ottiene

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \frac{1}{(\mu N)^k} p_0 = 1 \tag{1.7}$$

ossia

$$\left(1+\frac{1}{\mu N}\right)^{N} p_0 = 1 \tag{1.8}$$

da cui

$$p_0 = \left(1+\frac{1}{\mu N}\right)^{-N} \tag{1.9}$$

Il sistema risulta perciò stabile per ogni valore finito di N. Sostituendo la (1.9) nella (1.5) si ottiene

$$p_k = \binom{N}{k}\left(\frac{1}{\mu N}\right)^{k}\left(1+\frac{1}{\mu N}\right)^{-N} \tag{1.10}$$

La (1.10) può essere riscritta

$$p_k = \binom{N}{k}\left(\frac{1}{\mu N}\right)^{k}\left(\frac{\mu N}{1+\mu N}\right)^{N} \tag{1.11}$$

ed essendo

$$\left(\frac{\mu N}{1+\mu N}\right)^{N} = \left(\frac{\mu N}{1+\mu N}\right)^{N-k} \cdot \left(\frac{\mu N}{1+\mu N}\right)^{k} \tag{1.12}$$

dopo alcune manipolazioni algebriche avremo

$$p_k = \binom{N}{k}\left(\frac{1}{1+\mu N}\right)^{k}\left(\frac{\mu N}{1+\mu N}\right)^{N-k}, \ 0 \le k \le N \tag{1.13}$$

3. Per il calcolo di $\{r_k, k = 0, 1, \ldots, N-1\}$, si utilizza la relazione

$$r_k = \frac{\lambda_k p_k}{\sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j p_j} \tag{1.14}$$

Da notare che l'indice della sommatoria e l'indice k variano tra 0 ed $N-1$ in quanto $\lambda_N = 0$. Calcoliamo per prima cosa la sommatoria al denominatore della (1.14). A tal fine utilizziamo la (1.5) e la (1.1).

$$\sum_{j=0}^{N-1}\lambda_j p_j = \sum_{j=0}^{N-1}\frac{N-j}{N(j+1)}\binom{N}{j}\left(\frac{1}{\mu N}\right)^{j} p_0 \tag{1.15}$$

Tenendo presente che

$$\left(\frac{N-j}{j+1}\right)\binom{N}{j} = \binom{N}{j+1} \tag{1.16}$$

la (1.15) diventa

$$\sum_{j=0}^{N-1}\lambda_j p_j = \frac{p_0}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\binom{N}{j+1}\left(\frac{1}{\mu N}\right)^{j} = \frac{p_0}{N}\sum_{h=1}^{N}\binom{N}{h}\left(\frac{1}{\mu N}\right)^{h-1}$$

$$= \mu p_0\left[\sum_{h=0}^{N}\binom{N}{h}\left(\frac{1}{\mu N}\right)^{h} - 1\right] = \mu p_0\left[\left(1+\frac{1}{\mu N}\right)^{N} - 1\right] \tag{1.17}$$

NOTA. Tenendo conto della (1.9), la (1.17) può essere scritta anche sotto la seguente forma

$$\sum_{j=0}^{N-1}\lambda_j p_j = \mu p_0[p_0^{-1} - 1] = \mu(1-p_0) \tag{1.18}$$

Þ

Sostituendo la (1.17) nella (1.14), e tenendo conto della (1.5)

$$r_k = \frac{N-k}{\mu N(k+1)} \frac{\binom{N}{k}\left(\frac{1}{\mu N}\right)^k}{\left[\left(1+\frac{1}{\mu N}\right)^N - 1\right]}, \; 0 \le k \le N-1 \tag{1.19}$$

Dal confronto della (1.13) con la (1.19) risulta che le funzioni massa di probabilità $\{r_k, k = 0, 1, \ldots, N-1\}$ e $\{p_k, k = 0, 1, \ldots, N\}$ differiscono tra loro. Questo risultato era prevedibile in quanto il tasso di arrivo dei pacchetti sul router dipende dallo stato del (numero di pacchetti presenti nel) sistema per cui il teorema PASTA non è applicabile.

4. Come è noto dalla teoria, il throughput è definito da

$$\gamma = \sum_{k=1}^{N} \mu_k p_k \tag{1.20}$$

Poichè il tasso di servizio è costante

$$\gamma = \mu \sum_{k=1}^{N} p_k = \mu(1-p_0) \tag{1.21}$$

Confrontando la (1.18) e la (1.21) si può concludere che il sistema non perde pacchetti in quanto il "tasso medio" di arrivo dei pacchetti sul router è eguale al throughput.

Il carried load a' può essere calcolato in due modi:

- o partendo dalla definizione

$$a' = \sum_{k=1}^{N} p_k = 1 - p_0 \tag{1.22}$$

- oppure tenendo conto che

$$a' = \gamma \cdot b = \gamma / \mu = 1 - p_0 \tag{1.23}$$

Per il calcolo dell'offered load a si procede come segue

$$a = \bar{\lambda} \cdot b = \frac{\sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j p_j}{\mu} \tag{1.24}$$

Sostituendo la (1.18) nella (1.24) si ottiene

$$a = 1 - p_0 \tag{1.25}$$

Confrontando la (1.23) con la (1.25) si perviene alla conclusione che

$$a = a' \tag{1.26}$$

ossia il carried load e l'offered load coincidono. Questo risultato era prevedibile in quanto il sistema non perde pacchetti.

5. Per calcolare $E[N]$ partiamo dalla definizione

$$E[N] = \sum_{k=1}^{N} kp_k = \sum_{k=1}^{N} k\binom{N}{k} p_0 \left(\frac{1}{\mu N}\right)^k \tag{1.27}$$

Tenendo presente che

$$k\binom{N}{k} = N\binom{N-1}{k-1} \tag{1.28}$$

la (4.27) può essere sviluppata come segue

$$E[N] = \left(\frac{p_0}{\mu N}\right)\sum_{k=1}^{N} N\binom{N-1}{k-1}\left(\frac{1}{\mu N}\right)^{K-1} \tag{1.29}$$

Ponendo $j = k-1$ nell'indice della sommatoria

$$E[N] = \left(\frac{p_0}{\mu}\right)\sum_{j=0}^{N-1}\binom{N-1}{j}\left(\frac{1}{\mu N}\right)^{j} = \frac{p_0}{\mu}\left(1 + \frac{1}{\mu N}\right)^{N-1} \tag{1.30}$$

Sostituendo la (1.9) nella (1.30) si perviene al seguente risultato

$$E[N] = \frac{N}{1 + \mu N} \tag{1.31}$$

Per calcolare il tempo medio di risposta $E[R]$ si applica il risultato di Little. Utilizzando inoltre la (1.31) e la (1.21) si ottiene

$$E[R] = \frac{E[N]}{\bar{\lambda}} = \frac{N}{1 + \mu N} \cdot \frac{1}{\mu(1 - p_0)} \tag{1.32}$$

Sostituendo la (1.9) nella (1.32), dopo alcuni passaggi algebrici, si perviene al risultato richiesto

$$E[R] = \frac{E[N]}{\bar{\lambda}} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{N}{1 + \mu N} \cdot \frac{1}{1 - [1 + 1/(\mu N)]^{-N}} \tag{1.33}$$