ESERCIZIO 1: Si consideri la catena di Markov infinita i cui elementi p_{ij} della matrice di transisizione P sono dati da

$$p_{00} = p_{01} = 1/2 \tag{1}$$

$$p_{i0} = \frac{1}{i+1}, p_{i,i+1} = \frac{i}{i+1}, i = 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

Il candidato:

1. disegni il diagramma delle probabilità di transizione e descriva le caratteristiche della catena di Markov e dei relativi stati;
2. classifichi gli stati della catena;
3. calcoli $p_i^{(\infty)}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

RISOLUZIONE

1. La Figura 1.1 illustra il diagramma delle probabilità di transizione.

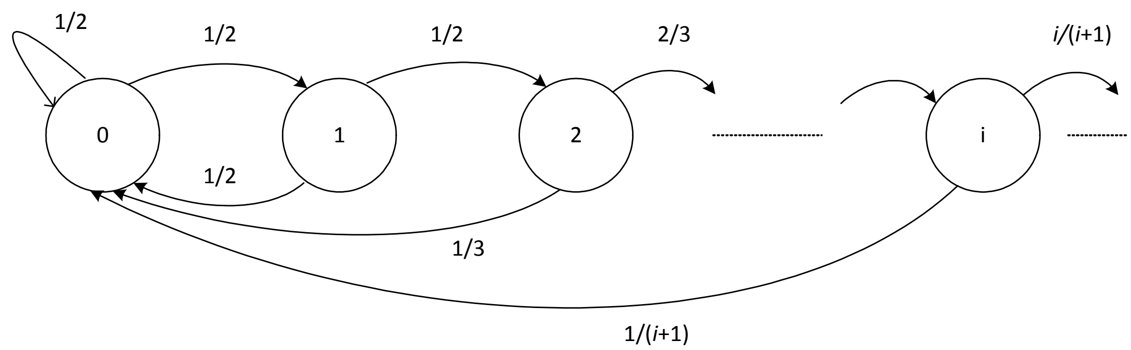

Figura 1.1: Diagramma delle Probabilità di Transizione

La catena è irriducibile in quanto tutti i suoi stati comunicano. La catena è aperiodica in quanto, ad esempio, lo stato $\{0\}$ transisce su se stesso.

2. Essendo irriducibile e aperiodica, la catena è ricorrente positiva se esiste la soluzione del problema $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \cdot P, \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{e} = 1$ con

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & \dots \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & \dots \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \tag{4}$$

Quindi

$$[\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots] = [\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots] \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & \dots \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & \dots \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

da cui

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3 + \dots \\ \pi_1 &= \frac{1}{2}\pi_0 \\ \pi_2 &= \frac{1}{2}\pi_1 \\ \pi_3 &= \frac{2}{3}\pi_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

Dopo alcuni passaggi algebrici otteniamo:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{1}{2}\pi_0 \\ \pi_2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\pi_0 \\ \pi_3 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\pi_0 \\ &\dots \end{aligned} \tag{5}$$

ovvero

$$\pi_i = \frac{1}{2i}\pi_0, \; i = 1, 2, 3, \dots \tag{1.1}$$

La π_0 si ricava dalla condizione di normalizzazione

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 \tag{1.2}$$

Quindi, sostituendo le (1.1) nella (1.2)

$$\pi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2i}\right]\pi_0 = 1 \tag{1.3}$$

ovvero

$$\pi_0\left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}\right] = 1 \tag{1.4}$$

Poiché la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ diverge, la catena non è ricorrente positiva.

4. Per studiare la natura degli stati della catena di Markov, costruiamo la matrice Q sopprimendo, nella matrice P, la prima riga e la prima colonna (in realtà possiamo sopprimere la k^{ma} riga e la corrispondente k^{ma} colonna, con $k \geq 0$) e quindi risolviamo il problema

$$\mathbf{h} = Q\mathbf{h}$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4/5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ \dots \end{bmatrix}, \tag{1.5}$$

Quindi

$$\begin{cases} h_1 = \frac{1}{2}h_2 \\ h_2 = \frac{2}{3}h_3 \\ h_3 = \frac{3}{4}h_4 \\ h_4 = \frac{4}{5}h_5 \\ \dots \end{cases} \tag{1.6}$$

Dopo alcuni passaggi algebrici otteniamo:

$$h_i = ih_1, \forall i \geq 1 \tag{1.7}$$

Dalla (1.7) possiamo concludere che la catena di Markov in esame è *ricorrente* in quanto l'unica soluzione del problema

$$\mathbf{h} = Q\mathbf{h}, 0 \leq h_i \leq 1, \forall i \geq 1 \tag{1.8}$$

è

$$h_i = 0 \tag{1.9}$$

Poiché la catena di Markov non è *ricorrente positiva*, essa dovrà essere necessariamente *ricorrente nulla*.

3. Per una catena irriducibile, aperiodica e non ricorrente positiva si ha:

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = 0, \forall i, j = 0, 1, 2, \dots \tag{1.10}$$

Tenendo presente che

$$p_j^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(0)} p^{(n)}{}_{kj} \tag{1.11}$$

si deduce facilmente

$$p_j^{(\infty)} = \lim_{n \to \infty} p_j^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(0)} [\lim_{n \to \infty} p^{(n)}{}_{kj}] = 0 , \ \forall j = 0, 1, 2, \dots \qquad (1.12)$$