ESERCIZIO 1: Si consideri un sistema *M/G/*1 stabile. Il candidato:

1. fissati il tasso di arrivo λ e il tempo medio di servizio *b,* dimostri sotto quale(i) condizione(i) il numero medio di utenti nel sistema è minimo;
2. calcoli esplicitamente, per un tale sistema, le probabilità stazionarie π_0, π_1 e π_2;
3. Supponiamo adesso che il suddetto sistema modelli un router collegato ad una linea di trasmissione di *C* bit/sec. Se il tasso del traffico di input al router è di $\lambda = 10$ pacchetti/sec e se ciascun pacchetto ha una lunghezza costante *L* di 100 bit, il candidato calcoli *C* affinché il numero medio di pacchetti nel sistema sia pari a 5.

RISOLUZIONE

1. Secondo la formula di *P-K* il numero medio $(E[N])$ di pacchetti nel sistema *M/G/*1 risulta.

$$E[N] = \rho + \frac{\lambda^2 b^{(2)}}{2(1-\rho)}$$

dove

$$\rho = \lambda b$$

$E[N]$ risulta perciò minimizzato dalla distribuzione dei tempi di servizio che minimizza $b^{(2)}$. Da notare che $b^{(2)}$ è eguale alla somma di b^2 e della varianza, ovvero $b^{(2)} \geq b^2$. Di conseguenza $b^{(2)}$ risulta minimizzato quando $b^{(2)} = b^2$, ovvero quando la varianza della distribuzione dei tempi di servizi è eguale a zero. Questa condizione è verificata da una distribuzione (dei tempi di servizio) costante. Indichiamo con Δ la loro durata.

2. Il sistema di cui al punto precedente è un sistema *M/D/*1 per il quale gli elementi a_k della matrice di transizione *P* sono

$$a_k = e^{-\lambda\Delta}\frac{(\lambda\Delta)^k}{k!}, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Per il sistema *M/G/*1 vale la relazione

$$\pi_0 = 1 - \rho$$

Dal sistema $\pi = \pi \cdot P$ si ricava:

$$\begin{cases} \pi_1 a_0 = \pi_0(1-a_0) \\ \pi_2 a_0 = \pi_1(1-a_1) - \pi_0 a_1 \end{cases}$$

Dopo alcune manipolazioni algebriche si ottiene

$$\pi_1 = e^{\rho}(1-\rho)(e^{-\rho}-1)$$

$$\pi_2 = e^{\rho}(1-\rho)[e^{\rho}-(1+\rho)]$$

3. Dalla equazione *P-K* per il sistema *M/D/*1 si ha

$$E[N] = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = 5$$

da cui

$$\rho^2 - 12\rho + 10 = 0$$

Risolvendo

$$\rho = 6 \pm \sqrt{26} \cong 6 \pm 5.1 = \begin{cases} 11.1 \\ 0.9 \end{cases}$$

Per la condizione di stabilità del sistema *M/D/*1, caso particolare del sistema *M/G/*1, soltanto la soluzione $\rho = 0.9 < 1$ è accettabile. Quindi

$$\rho = \lambda\Delta = 0.9$$

da cui

$$\Delta = \frac{0.9}{10 \cdot 100} = 0.9 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$$

La velocità trasmissiva C si calcola facilmente come segue:

$$C = \frac{L}{\Delta} = \frac{100}{0.9 \cdot 10^{-3}} \cong 100 \ Kbps$$