ESERCIZIO 1: Si consideri la catena di Markov caratterizzata dalla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a & b & c & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a & b & c & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a & b & c & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

dove $abc > 0$ e, ovviamente, $a + b + c = 1$.

Il candidato:

1. disegni il diagramma delle probabilità di transizione e descriva le caratteristiche della catena di Markov e dei relativi stati;
2. determini la condizione di stabilità e, sotto tale condizione, calcoli le probabilità stazionarie di stato π_i, $i \geq 0$;
3. utilizzando quanto dedotto al punto 2 precedente, calcoli la z-transform delle π_i, $i \geq 0$;
4. nel caso in cui $a = b = c = 1/3$ dica se la catena è stabile o non e, in quast'ultimo caso, studi le caratteristiche degli stati;
5. basandosi sulla sola intuizione dica qual è la natura della catena in esame nel caso particolare in cui $a = 1/4, b = 1/4, c = 2/4$.

RISOLUZIONE

1. La Figura 1.1 illlustra il diagramma delle probabilità di transizione.

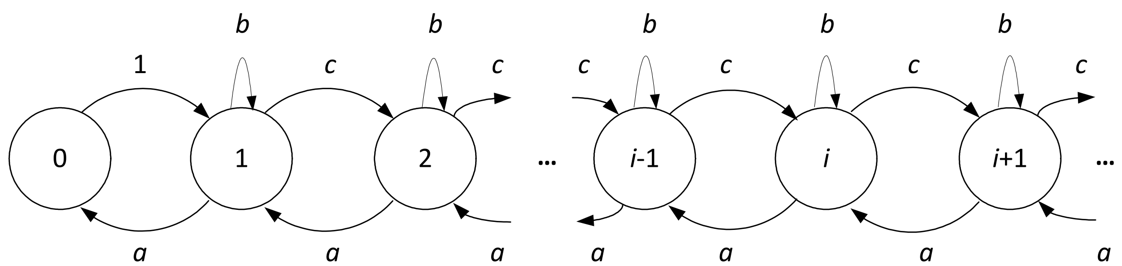

Figura 1.1: Diagramma delle Probabilità di Transizione

La catena è irriducibile in quanto tutti i suoi stati comunicano. La catena è aperiodica in quanto $b > 0$ per cui gli stati $\{1, 2, 3, \dots\}$ transiscono su se stessi.

2. Dobbiamo risolvere il problema $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \cdot P, \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{e} = 1$. Iniziamo a risolvere $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \cdot P$, ovvero

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_1 a \\ \pi_1 = \pi_0 + \pi_1 b + \pi_2 a \\ \pi_i = \pi_{i-1} c + \pi_i b + \pi_{i+1} a, \forall i \geq 2 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_1 a \\ \pi_2 a = \pi_1(1-b) - \pi_0 = \pi_1(a+c) - \pi_0 \\ \pi_3 a = \pi_2(1-b) - \pi_1 c = \pi_2(a+c) - \pi_1 c \\ \ldots = \ldots = \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_1 = \dfrac{\pi_0}{a} \\ \pi_2 = \pi_1\left(1 + \dfrac{c}{a}\right) - \dfrac{\pi_0}{a} \\ \pi_3 = \pi_2\left(1 + \dfrac{c}{a}\right) - \pi_1 \dfrac{c}{a} \\ \ldots = \ldots = \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_1 = \dfrac{\pi_0}{a} \\ \pi_2 = \pi_0 \dfrac{c}{a^2} \\ \pi_3 = \pi_0 \dfrac{c^2}{a^3} \\ \ldots = \ldots = \ldots \end{cases}$$

In generale

$$\pi_i = \frac{\pi_0}{c}\left[\frac{c}{a}\right]^i, \forall i \geq 1 \tag{1.2}$$

La π_0 si ricava dalla condizione di normalizzazione

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 \tag{1.3}$$

Quindi, sostituendo le (1.2) nella (1.3)

$$\pi_0 + \frac{\pi_0}{c}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{c}{a}\right]^i = 1 \tag{1.4}$$

ovvero

$$\pi_0 + \frac{\pi_0}{c}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{c}{a}\right]^i - 1\right) = 1 \tag{1.5}$$

Se $c < a$ la serie converge ed ha per somma

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{c}{a}\right]^i = \frac{1}{1 - c/a} = \frac{a}{a-c} \tag{1.6}$$

per cui dalla (1.5) ricaviamo

$$\pi_0 = \frac{a-c}{1+a-c} \tag{1.7}$$

Sostituendo la (1.7) nella (1.2) otteniamo

$$\pi_i = \frac{a-c}{c(1+a-c)}\left[\frac{c}{a}\right]^i, \forall i \geq 1 \tag{1.8}$$

In sintesi, per $c < a$ la catena è ricorrente positiva (il sistema è stabile) e le probabilità stazionarie di stato sono:

$$\pi_i = \begin{cases} \dfrac{a-c}{1+a-c} & i = 0 \\ \dfrac{a-c}{c(1+a-c)}\left(\dfrac{c}{a}\right)^i & i \geq 1 \end{cases} \tag{1.9}$$

3. Utilizzando la definizione di z-transform

$$\Pi(z) = \sum_{i=0}^{\infty}\pi_i z^i \tag{1.10}$$

e sostituendo le (1.9) nella (1.10) si ottiene

$$\Pi(z) = \frac{a-c}{1+a-c} + \frac{a-c}{c(1+a-c)}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{cz}{a}\right)^i$$

$$= \frac{a-c}{1+a-c} + \frac{a-c}{c(1+a-c)}\left[\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{cz}{a}\right)^{i} - 1\right]$$

$$= \frac{a-c}{1+a-c} + \frac{a-c}{c(1+a-c)}\left[\frac{1}{1-\frac{cz}{a}} - 1\right]$$

Dopo alcuni passaggi algebrici si perviene quindi al seguente risultato finale.

$$\Pi(z) = \left(\frac{a-c}{1+a-c}\right)\left(\frac{a+z(1-c)}{a-cz}\right) \tag{1.11}$$

4. Poiché $c = a = 1/3$ la catena di Markov non è stabile in quanto la condizione di stabilità derivata precedentemente risulta $c < a$. Per studiare la natura degli stati costruiamo la matrice *Q* sopprimendo, nella matrice *P,* la prima riga e la prima colonna (in realtà possiamo sopprimere la k^{ma} riga e la corrispondente k^{ma} colonna, con $k \geq 0$) e quindi risolviamo il problema

$$\mathbf{h} = Q\mathbf{h}$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a & b & c & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a & b & c & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a & b & c & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ \dots \end{bmatrix}, \tag{1.12}$$

Nel caso in esame, la (1.12) diventa:

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ \dots \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

Sviluppando la (1.13) per esteso otteniamo:

$$\begin{cases} h_1 = \frac{1}{3}h_1 + \frac{1}{3}h_2 \\ h_2 = \frac{1}{3}h_1 + \frac{1}{3}h_2 + \frac{1}{3}h_3 \\ h_3 = \frac{1}{3}h_2 + \frac{1}{3}h_3 + \frac{1}{3}h_4 \\ h_4 = \frac{1}{3}h_3 + \frac{1}{3}h_4 + \frac{1}{3}h_5 \\ \dots \end{cases} \tag{1.14}$$

da cui

$$\begin{cases} h_1 = \frac{1}{2}h_2 \\ h_2 = \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{2}h_3 \\ h_3 = \frac{1}{2}h_2 + \frac{1}{2}h_4 \\ h_4 = \frac{1}{2}h_3 + \frac{1}{2}h_5 \\ \dots \end{cases}$$

Dopo alcuni passaggi algebrici perveniamo al seguente risultato:

$$\begin{cases} h_2 = 2h_1 \\ h_3 = 3h_1 \\ h_4 = 4h_1 \\ h_5 = 5h_1 \\ \dots \end{cases} , \tag{1.15}$$

La soluzione generale del problema (1.13) risulta quindi:

$$h_i = ih_1, \ \forall i \geq 1 \tag{1.16}$$

Dalla (1.16) possiamo concludere che la catena di Markov in esame è *ricorrente* in quanto l'unica soluzione del problema

$$\mathbf{h} = Q\mathbf{h}, \; 0 \le h_i \le 1, \; \forall i \ge 1 \tag{1.17}$$

è

$$h_i = 0 \tag{1.18}$$

Poiché la catena di Markov non è *ricorrente positiva*, essa dovrà essere necessariamente *ricorrente nulla*.

5. Nel caso in cui $c > a$ l'intuizione ci porta a pensare che la catena tenda a "spostarsi" continuamente verso destra al trascorrere del tempo. C'è perciò da aspettarsi che la catena di Markov sia transiente. Infatti, sviluppando il sistema (1.12) con $c > a$ (sviluppo non richiesto allo studente) si perviene a tale conclusione.