ESERCIZIO 1: Si consideri una catena di Markov con spazio degli stati $E = \{0, 1, 2, \ldots\}$ infinito e probabilità di transizione:

$$p_{ij} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{j}\binom{i}{n}p^n q^{i-n}\frac{\lambda^{j-n}}{(j-n)!}, \tag{1.1}$$

$$\text{dove } p + q = 1,\ 0 < p < 1,\ \lambda > 0 \tag{1.2}$$

Il candidato:

1. descriva la natura degli stati della catena;
2. sommi gli elementi della prima riga della matrice di transizione (p_{0j}) e commenti il risultato ottenuto;
3. estenda il risultato precedente ad una generica riga $i > 0$;
4. partendo da

$$\pi_i = \sum_{j=0}^{\infty}\pi_j p_{ji} \tag{1.3}$$

dimostri che

$$\Pi(z) = e^{\lambda(z-1)}\Pi(1 + p(z-1)) \tag{1.4}$$

dove

$$\Pi(z) = \sum_{i=0}^{\infty}\pi_i z^i \tag{1.5}$$

è la z-transform associata alla distribuzione delle probabilità stazionarie di stato π_i;

5. utilizzando il *Principio di Induzione Matematica* dimostri che

$$\Pi(z) = e^{\lambda(z-1)f_{n-1}(p)}\Pi(1 + p^n(z-1)),\ n \geq 1 \tag{1.6}$$

dove

$$f_{n-1}(p) = \sum_{k=0}^{n-1}p^k,\ n \geq 1 \tag{1.7}$$

6. utilizzando la (1.6) ricavi le π_i.

NOTA. Per rispondere alla domanda 6 precedente si suggerisce al candidato di far tendere $n \to \infty$ in entrambi i membri della (1.6). In tal caso si ottiene la z-transform di una distribuzione nota.

RISOLUZIONE ESERCIZIO

1. E' semplice verificare che $p_{ij} > 0$ per ogni i e j (poiché $0 < p < 1$). Questo significa che la catena è irriducibile in quanto tutti i suoi stati comunicano. Da $p_{ij} > 0$ (per ogni i e j) segue, in particolare, che $p_{ii} > 0$ e quindi la catena è aperiodica.

2. Dalla (1.1) deduciamo

$$p_{0j} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{j} \binom{0}{n} p^n q^{0-n} \frac{\lambda^{j-n}}{(j-n)!} = e^{-\lambda} \binom{0}{0} p^0 q^{0-0} \frac{\lambda^{j-0}}{(j-0)!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \quad (1.8)$$

Di conseguenza

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{0j} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{j} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1 \quad (1.9)$$

3. In generale, dalla (1.1) si può dedurre, per ogni fissato i

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{j} \binom{i}{n} p^n q^{i-n} \frac{\lambda^{j-n}}{(j-n)!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} \binom{i}{n} p^n q^{i-n} \frac{\lambda^{j-n}}{(j-n)!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{i}{n} p^n q^{i-n} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\lambda^h}{h!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} \sum_{n=0}^{i} \binom{i}{n} p^n q^{i-n}$$

$$= (p+q)^i = 1$$

Il penultimo passaggio è una conseguenza del fatto che $\binom{i}{n} = 0$ per ogni $n > i$.

4. sostituendo la (1.3) nella (1.5) si ottiene

$$\Pi(z) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j p_{ji} z^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{i} \binom{j}{n} p^n q^{j-n} \frac{\lambda^{i-n}}{(i-n)!} z^i \tag{1.10}$$

Poichè

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{i} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=n}^{\infty}$$

la (1.10) può essere riscritta come segue

$$\Pi(z) = e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \sum_{n=0}^{\infty} \binom{j}{n} p^n q^{j-n} \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\lambda^{i-n}}{(i-n)!} z^i$$

Ponendo $k = i - n$ si ottiene

$$\Pi(z) = e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \sum_{n=0}^{\infty} \binom{j}{n} p^n q^{j-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} z^{k+n}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \sum_{n=0}^{\infty} \binom{j}{n} p^n q^{j-n} z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \sum_{n=0}^{\infty} \binom{j}{n} p^n q^{j-n} z^n e^{\lambda z}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \sum_{n=0}^{\infty} \binom{j}{n} p^n q^{j-n} z^n e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \sum_{n=0}^{\infty} \binom{j}{n} (pz)^n q^{j-n}$$

$$= e^{\lambda(z-1)}\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \sum_{n=0}^{j} \binom{j}{n} (pz)^n q^{j-n} = e^{\lambda(z-1)}\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j (pz+q)^j$$

$$= e^{\lambda(z-1)}\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j (pz+1-p)^j = e^{\lambda(z-1)}\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j [1+p(z-1)]^j$$

$$= e^{\lambda(z-1)}\Pi[1+p(z-1)]$$

Quindi

$$\Pi(z) = e^{\lambda(z-1)}\Pi[1+p(z-1)] \tag{1.11}$$

5. Per $n = 1$ la (1.6) è verificata in quanto si riduce alla (1.4). Supponiamo adesso che la (1.6) sia verificata per un generico $n > 1$, ovvero

$$\Pi(z) = e^{\lambda(z-1)f_{n-1}(p)}\Pi(1+p^n(z-1)) \tag{1.12}$$

$$f_{n-1}(p) = 1+p+p^2+\ldots+p^{n-1} \tag{1.13}$$

Vogliamo allora dimostrare che la (1.6) è verificata anche per $n+1$.
Partiamo dal risultato (1.4), ovvero dalla relazione

$$\Pi(z) = e^{\lambda(z-1)}\Pi(1+p(z-1)) \tag{1.14}$$

Sostituiamo a z l'espressione $1+p^n(z-1)$.

$$\Pi(1+p^n(z-1)) = e^{\lambda(1+p^n(z-1)-1)}\Pi[1+p(p^n(z-1))]$$

Di conseguenza:

$$\Pi(1+p^n(z-1)) = e^{\lambda p^n(z-1)}\Pi[1+p^{n+1}(z-1)] \tag{1.15}$$

Dalla (1.12) abbiamo

$$e^{-\lambda(z-1)f_{n-1}(p)}\Pi(z) = \Pi(1+p^n(z-1)) \tag{1.16}$$

Dalla (1.15) e (1.16) otteniamo

$$e^{-\lambda(z-1)f_{n-1}(p)}\Pi(z) = e^{\lambda p^n(z-1)}\Pi[1+p^{n+1}(z-1)]$$

per cui

$$\Pi(z) = e^{\lambda(z-1)f_{n-1}(p)}e^{\lambda p^n(z-1)}\Pi[1+p^{n+1}(z-1)]$$

$$= e^{\lambda(z-1)[f_{n-1}(p)+p^n]}\Pi[1+p^{n+1}(z-1)]$$

In conclusione abbiamo dimostrato che

$$\Pi(z) = e^{\lambda(z-1)[f_n(p)]}\Pi([1 + p^{n+1}(z-1)]) \tag{1.17}$$

dove

$$f_n(p) = 1 + p + p^2 + \ldots + p^n \tag{1.18}$$

7. Le (1.17) e (1.18) valgono per ogni $n = 1, 2, \ldots$. Facendo tendere $n \to \infty$ si ottiene

$$\Pi(z) = e^{\lambda(z-1)/(1-p)}\Pi(1) = e^{\lambda(z-1)/(1-p)} \tag{1.19}$$

Quindi

$$\Pi(z) = e^{\lambda(z-1)/(1-p)} \tag{1.20}$$

La (1.20) non è altro che la z-transform della distribuzione di Poisson con parametro $\lambda/(1-p) = \lambda/q$, $q = 1-p$. Di conseguenza

$$\pi_k = \frac{(\lambda/q)^k}{k!}e^{-\lambda/q},\ k = 0, 1, 2, \infty \tag{1.21}$$