ESERCIZIO 1: In alcuni casi la catena di Markov immersa (embedded Markov chain) di un sistema a coda singola M/G/1 è caratterizzata dalla seguente matrice di transizione

$$P = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Il candidato:

1. interpreti gli elementi $a_i$ e $b_i$, $i \geq 0$, e descriva almeno un sistema reale che sia modellabile mediante un sistema M/G/1 con la suddetta matrice di transizione;
2. utilizzando argomentazioni stocastiche, dimostri che le probabilità stazionarie di stato $\pi_i$, $i \geq 0$, del sistema M/G/1 in esame soddisfano il sistema lineare di equazioni

$$\pi_i = \pi_0 b_i + \sum_{h=1}^{i+1} \pi_h a_{i-h+1}, \ i \in \mathrm{N} \tag{1.2}$$

3. dimostri che la $z$-transform $(\Pi(z))$ del numero di pacchetti presenti nel sistema in corrispondenza dei punti di embedding è data da

$$\Pi(z) = \pi_0 \frac{zB(z) - A(z)}{z - A(z)} \tag{1.3}$$

dove

$$B(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i, \ A(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \tag{1.4}$$

4. ricavi le condizioni di stabilità del sistema e calcoli, sotto tali condizioni, la probabilità stazionaria $\pi_0$.

RISOLUZIONE

1. Gli elementi $b_i$, $i \in \mathrm{N}$, della matrice di transizione rappresentano le probabilità che arrivino $i \geq 0$ pacchetti mentre è in servizio un pacchetto che ha trovato il sistema vuoto. Le probabilità $a_i$, $i \in \mathrm{N}$ mantengono invece lo

stesso significato già visto per il sistema M/G/1 classico. Il fatto che le $b_i$, $i \in \mathrm{N}$ differiscano da $a_i$, $i \in \mathrm{N}$ sta ad indicare che la distribuzione del tempo di servizio risulta essere diversa se il pacchetto, arrivando, trova il sistema vuoto oppure no. Un sistema M/G/1 di questo tipo modella, ad esempio, un processo che trasferisce files ad un altro processo attraverso una connessione TCP, connessione che deve essere aperta prima che il trasferimento del primo file possa aver luogo. Ovviamente il trasferimento del primo file sperimenterà un tempo di servizio diverso da quello dei file che seguiranno in quanto il processo dovrà farsi carico dell'apertura della connessione di trasporto.

2. Il primo termine nel secondo membro della (1.2) è la probabilità che un pacchetto in arrivo presso un sistema scarico ($\pi_0$) mentre esce dal sistema si lasci alle spalle $i \geq 0$ pacchetti in quanto, durante il servizio del pacchetto, sono arrivati nel sistema $i$ pacchetti con probabilità $b_i$.

Il secondo termine nel secondo membro della (1.2) è invece la probabilità che, partendo da $h > 0$ pacchetti nel sistema ($\pi_h$) in un (qualunque) punto di embedding, nel successivo punto di embedding vi siano $i \geq 0$ pacchetti in quanto tra i due punti di embedding (tempo di servizio del pacchetto in uscita dal sistema) sono arrivati $i - h + 1$ pacchetti con probabilità $a_{i-h+1}$.

3. Moltiplicando entrambi i membri della (1.2) per $z^i$ e sommando membro a membro per $i$ che varia tra zero ed infinito si ottiene

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i z^i = \pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i + \sum_{i=0}^{\infty} z^i \sum_{h=1}^{i+1} \pi_h a_{i-h+1} \tag{1.5}$$

Poiché

- $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{i+1} = \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{i=h-1}^{\infty}$
- $B(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i$ (v. (1.4))

la (1.5) può essere riscritta

$$\Pi(z) = \pi_0 B(z) + \sum_{h=1}^{\infty} \pi_h \sum_{i=h-1}^{\infty} z^i a_{i-h+1} \tag{1.6}$$

Effettuando il cambiamento di indici: $j = i - h + 1$, la (1.6) può essere trasformata come segue

$$\Pi(z) = \pi_0 B(z) + \sum_{h=1}^{\infty} \pi_h \sum_{j=0}^{\infty} z^{j+h-1} a_j \tag{1.7}$$

che può essere riscritta

$$\Pi(z) = \pi_0 B(z) + \frac{1}{z} \sum_{h=1}^{\infty} \pi_h z^h \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \tag{1.8}$$

Poiché dalla (1.4) $A(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$, la (1.8) diventa

$$\Pi(z) = \pi_0 B(z) + \frac{1}{z}[\Pi(z) - \pi_0]A(z) \tag{1.9}$$

e, risolvendo rispetto a $\Pi(z)$,

$$\Pi(z) = \pi_0 \frac{zB(z) - A(z)}{z - A(z)} \tag{1.10}$$

4. La (1.10) contiene $\pi_0$ come incognita. Per ricavare $\pi_0$ si procede in modo standard. Si sfrutta cioè il fatto che $\Pi(z)$ è la PGF di una distribuzione per cui $\Pi(1) = 1$. Poiché per $z = 1$ il numeratore ed il denominatore della (1.10) si annullano, dobbiamo applicare il teorema dell' Hopital e fare quindi il limite per $z$ che tende ad 1 da sinistra.

$$1 = \lim_{z \to 1-} \pi_0 \frac{zB^{(1)}(z) + B(z) - A^{(1)}(z)}{1 - A^{(1)}(z)} \tag{1.11}$$

Tenendo presente che

$$\lim_{z \to 1-} A^{(1)}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i = \lambda b = \rho \tag{1.12}$$

$$\lim_{z \to 1-} B^{(1)}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} i b_i \tag{1.13}$$

la (1.11) diventa

$$1 = \pi_0 \left[1 + \frac{1}{1-\rho} \sum_{i=1}^{\infty} i b_i \right] \tag{1.14}$$

Affinchè $\pi_0$ abbia il significato di probabilità stazionaria di zero pacchetti nel sistema (sistema scarico), nella (1.14) deve verificarsi la diseguaglianza

$$0 < \frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{\infty} ib_i < \infty \tag{1.15}$$

la quale risulta soddisfatta, ovvero il sistema in esame è stabile, se e solo se valgono le condizioni

$$\sum_{i=1}^{\infty} ib_i < \infty \tag{1.16}$$

$$\rho = \sum_{i=1}^{\infty} ia_i < 1 \tag{1.17}$$

Se le (1.17) ed (1.16) sono soddisfatte, allora

$$\pi_0 = \left[1 + \frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{\infty} ib_i\right]^{-1} \tag{1.18}$$

Le (1.16) ed (1.17) hanno rispettivamente la seguente interpretazione stocastica: il sistema è stabile se e solo se

(i) il numero medio di arrivi durante il servizio di un pacchetto arrivato a sistema scarico è finito;

(ii) il numero medio di arrivi durante il servizio di un pacchetto arrivato a sistema non scarico deve essere strettamente inferiore ad uno.

Da notare che quando $a_i = b_i$, $i \in \mathrm{N}$, le due precedenti condizioni (1.16) ed (1.17) coincidono fornendo entrambe $\rho < 1$.

(1.19)