ESERCIZIO 1: Supponiamo che 50 terminali siano collegati ad un concentratore. Ciascun terminale invia pacchetti la cui lunghezza è distribuita esponenzialmente con media $m = E[M]$ (informazioni di controllo comprese) pari a 1000 bits. I vari pacchetti vengono trasmessi sul canale di uscita la cui capacità è di C bit/sec. Il tasso di invio dei pacchetti da parte dei terminali dipende da questi ultimi nel modo seguente

- 25 terminali hanno un tasso di invio di 1 pacchetto /10 secondi ciascuno.
- 25 terminali hanno un tasso di invio di 1 pacchetto /5 secondi ciascuno.

Supponiamo che per entrambi le classi di terminali il processo degli arrivi sia di Poisson. Il candidato

1. determini il valore di C affinché il numero medio di pacchetti nel sistema sia 5;
2. determini il valore di C, che da ora in poi verrà indicato con $\tilde{C}$, affinché il 99-mo percentile del numero di pacchetti nel sistema sia 5;
3. effettui lo stesso calcolo di cui al punto 1 nell'ipotesi in cui la lunghezza dei pacchetti sia costante e pari ad 1000 bits;
4. valuti il 99-mo percentile della distribuzione del tempo di attesa in coda e del tempo di risposta del sistema nell'ipotesi che il concentratore venga modellato con un sistema M/M/1 a memoria infinita.

Supponendo adesso che la velocità di trasmissione della linea di uscita del concentratore sia $\tilde{C}$ e che il concentratore venga modellato con un sistema a coda M/M/1/K, con $K = 5$, il candidato:

5. determini il valore della probabilità di perdita (P_L) e del throughput.

RISOLUZIONE

1. Il numero medio di pacchetti nel sistema M/M/1 classico è dato da

$$E[N] = \frac{\rho}{1-\rho} \tag{1.1}$$

dove

$$\rho = \lambda/\mu \tag{1.2}$$

Nel caso in esame risulta

$$\lambda = \frac{25}{10} + \frac{25}{5} = 7{,}5 \text{ pacchetti/sec} \tag{1.3}$$

Esprimiamo ρ in funzione di C. Il tempo medio di trasmissione b in secondi di un pacchetto risulta

$$b = m/C \tag{1.4}$$

dove m è la lunghezza media dei pacchetti (in bit) e C è la velocità di trasmissione del canale di uscita in bit/sec. Il tasso di servizio μ, espresso in pacchetti/sec risulta

$$\mu = \frac{1}{b} = \frac{C}{m} \tag{1.5}$$

Pertanto, utilizzando la (1.4) e la (1.5)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda m}{C} \tag{1.6}$$

Sostituendo la (1.6) nella (1.1) ed utilizzando la condizione $E[N] = 5$, dopo alcuni passaggi algebrici, otteniamo

$$C = (6/5)\lambda L \tag{1.7}$$

Per $m = 1000$ bit e $\lambda = 7{,}5$ pacchetti/sec dalla (1.7) ricaviamo

$$C = (6/5) \cdot 7{,}5 \cdot 1000 = 9000 \text{ bit/sec} \tag{1.8}$$

2. Dalla definizione di percentile di una variabile aleatoria si ha

$$P\{N \le 5\} = \sum_{k=0}^{5} p_k = 0{,}99 \tag{1.9}$$

dove p_k e' la probabilita' stazionaria di avere k pacchetti nel sistema. Per un sistema M/M/1 si ha

$$p_k = P\{N = k\} = \rho^k(1-\rho) \text{ , } k \in \mathrm{N} \tag{1.10}$$

Sostituendo la (1.10) nella (1.9) si ottiene

$$\sum_{k=0}^{5} \rho^k(1-\rho) = 0{,}99 \tag{1.11}$$

da cui

$$\rho^6 = 0{,}01 \tag{1.12}$$

Prendendo il logaritmo in base 10 di entrambi i membri della (1.12)

$$6 log \rho = log 0,01 = -2$$

si ricava facilmente $\rho \cong 0,463$. Tenendo presente la (1.6)

$$\rho = (\lambda m)/C \cong 0,463$$

si ottiene

$$\tilde{C} = \frac{\lambda m}{0,463} = \frac{7,5 \cdot 1000}{0,463} \cong 17441 \text{ bit/sec} \qquad (1.13)$$

Confrontando $\tilde{C}$ con il C della precedente domanda si vede chiaramente che mentre con $C = 9000$ bit/sec si ottiene $E[N] = 5$, ènecessario $\tilde{C} = 17441$ bit/sec se vogliamo una probabilità pari a 0.99 di avere un numero di pacchetti nel sistema minore od uguale a 5.

3. Partiamo dalla formula di P-K

$$E[N] = \rho + \frac{\lambda^2 b^{(2)}}{2(1-\rho)} \qquad (1.14)$$

Nel caso di tempo di servizio costante, $b^{(2)} = b^2$. Poichè$\rho = \lambda b$, la (1.14) puo’ essere riscritta

$$E[N] = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \qquad (1.15)$$

Dalla condizione $E[N] = 5$, dopo alcuni passaggi algebrici, la (1.15) fornisce

$$\rho^2 - 12\rho + 10 = 0 \qquad (1.16)$$

equazione che ammette come soluzioni

$$\rho = 6 \pm \sqrt{26} = 6 \pm 5,099 \qquad (1.17)$$

Dalla condizione di stabilità di un sistema M/G/1 $(\rho < 1)$ segue che l’ unica soluzione accettabile dell’ equazione (1.16) risulta $\rho = \lambda b = 0,901$. Tenendo adesso presente la (1.6)

$$(\lambda m)/C = 0,901 \qquad (1.18)$$

si ricava

$$C \;=\; \frac{7{,}5 \cdot 1000}{0{,}901} \;=\; 8324 \;\text{ bit/sec} \tag{1.19}$$

4. Il 99-mo percentile del tempo medio di attesa in coda si calcola a partire dalla distribuzione $W(t)$ che, per un sistema M/M/1 risulta

$$W(t) \;=\; 1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)t} \;,\; t \geq 0 \tag{1.20}$$

Dalla definizione di percentile e dalla (1.20)

$$P\{\, W \leq \pi_W(99)\,\} \;=\; 1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)\pi_W(99)} \;=\; 0{,}99 \tag{1.21}$$

si deduce

$$\rho e^{-\mu(1-\rho)\pi_W(99)} \;=\; 0{,}01 \tag{1.22}$$

$$\pi_W(99) \;=\; \frac{\log\rho - \log 0{,}01}{\mu(1-\rho)} \tag{1.23}$$

Calcoliamo i valori di ρ e μ

$$\rho = \frac{\lambda m}{\tilde{C}} = \frac{7{,}5 \cdot 1000}{17441} \cong 0{,}43 \tag{1.24}$$

$$\mu \;=\; \frac{\tilde{C}}{L} \;=\; \frac{17441}{1000} \;=\; 17{,}441 \tag{1.25}$$

Sostituendo (1.24) e (1.25) in (1.23) si ottiene

$$\pi_W(99) \;=\; \frac{\log 0{,}43 - \log 0{,}01}{17{,}441(1-0{,}43)} \cong 0{,}378 \;\text{ sec} \tag{1.26}$$

La distribuzione del tempo di risposta del sistema risulta

$$R(t) \;=\; 1 - e^{-\mu(1-\rho)t} \;\;,\; t \geq 0 \tag{1.27}$$

Di conseguenza

$$P\{\, R \leq \pi_R(99)\,\} \;=\; 1 - e^{-\mu(1-\rho)\pi_R(99)} \;=\; 0{,}99$$

da cui

$$e^{-\mu(1-\rho)\pi_R(99)} \;=\; 0{,}01$$

Perciò

$$\pi_R(99) = -\frac{log\,0{,}01}{\mu(1-\rho)} \tag{1.28}$$

Sostituendo nella (1.28) i valori di ρ e μ dati rispettivamente dalla (1.24) e (1.25), si ottiene

$$\pi_R(99) = -\frac{log\,0{,}01}{17{,}441(1-0{,}43)} \cong 0{,}46 \quad \text{sec} \tag{1.29}$$

5. Ricordiamo che la probabilità di perdita P_L in un sistema a memoria finita M/M/1/K, èdata dalla relazione

$$P_L = \frac{(1-a)a^K}{1-a^{K+1}}\ ,\ a = \rho = \frac{\lambda m}{C} \tag{1.30}$$

Nel caso in esame $K = 5$ per cui la (1.30) diventa

$$P_L = P_5 = \frac{(1-a)a^5}{1-a^6} = \frac{(1-0{,}901)\cdot 0{,}901^5}{1-0{,}901^6} = 0{,}128 \tag{1.31}$$

Il throughput γ si calcola tramite la relazione

$$\gamma = \lambda(1-P_L) = 7{,}5(1-0{,}128) = 6{,}54 \ \text{pacchetti/se} \tag{1.32}$$