ESERCIZIO 1: In alcuni casi la catena di Markov immersa (embedded Markov chain) di un sistema a coda singola M/G/1 è caratterizzata dalla seguente matrice di transizione

$$P = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Il candidato:

1. interpreti gli elementi a_i e b_i, $i \geq 0$, e illustri (almeno) un esempio concreto di un sistema M/G/1 che dia origine alla suddetta matrice di transizione;
2. utilizzando argomentazioni stocastiche, dimostri che le probabilità stazionarie di stato π_i, $i \geq 0$, del sistema M/G/1 in esame soddisfano il seguente sistema lineare di equazioni

$$\pi_i = \pi_0 b_i + \sum_{h=1}^{i+1} \pi_h a_{i-h+1}, \; i \in \mathrm{N} \tag{1.2}$$

3. dimostri che la z-transform $(\Pi(z))$ del numero di pacchetti del sistema in corrispondenza dei punti di embedding è data da

$$\Pi(z) = \pi_0 \frac{zB(z) - A(z)}{z - A(z)} \tag{1.3}$$

dove

$$B(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i, \; A(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \tag{1.4}$$

4. ricavi le condizioni di stabilità del sistema e calcoli, sotto tali condizioni, la probabilità stazionaria π_0.

RISOLUZIONE

1. Gli elementi b_i, $i \in \mathrm{N}$, della matrice di transizione rappresentano le probabilità che arrivino $i \geq 0$ pacchetti mentre è in servizio un pacchetto che ha trovato il sistema vuoto. Le probabilità a_i, $i \in \mathrm{N}$ mantengono invece lo

stesso significato già visto per un sistema M/G/1 classico. Il fatto che le probabilità b_i, $i \in N$ differiscano dalle probabilità a_i, $i \in N$ sta ad indicare che la distribuzione del tempo di servizio risulta essere diversa se il pacchetto, arrivando, trova il sistema vuoto oppure no.

Si consideri, per esempio, un processo che trasferisce files ad un altro processo tramite una connessione TCP. Se la connessione di trasporto non è aperta prima del trasferimento di un file, il primo segmento del file sperimenterà un tempo di servizio diverso da quello dei segmenti che seguiranno in quanto esso dovrà attendere l'apertura della connessione di trasporto sottostante.

2. Il primo termine nel secondo membro della (1.2) è la probabilità che, partendo da un sistema scarico, un pacchetto in uscita lasci nel sistema $i \geq 0$ pacchetti. Il secondo termine contiene invece la probabilità che, partendo da $h > 0$ pacchetti nel sistema in un (qualunque) punto di embedding, nel successivo punto di embedding vi siano $i \geq 0$ pacchetti.

3. Moltiplicando entrambi i membri della (1.2) per z^i e sommando membro a membro per i che varia tra zero ed infinito si ottiene

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i z^i = \pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i + \sum_{i=0}^{\infty} z^i \sum_{h=1}^{i+1} \pi_h a_{i-h+1} \tag{1.5}$$

Poichè

- $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{i+1} = \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{i=h-1}^{\infty}$
- $B(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i$ (v. (1.4))

la (1.5) puo' essere riscritta

$$\Pi(z) = \pi_0 B(z) + \sum_{h=1}^{\infty} \pi_h \sum_{i=h-1}^{\infty} z^i a_{i-h+1} \tag{1.6}$$

Effettuando il cambiamento di indici: $j = i - h + 1$, la (1.6) puo' essere trasformata come segue

$$\Pi(z) = \pi_0 B(z) + \sum_{h=1}^{\infty} \pi_h \sum_{j=0}^{\infty} z^{j+h-1} a_j \tag{1.7}$$

che puo' essere riscritta

$$\Pi(z) = \pi_0 B(z) + \frac{1}{z} \sum_{h=1}^{\infty} \pi_h z^h \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \tag{1.8}$$

Poichè dalla (1.4) $A(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$, la (1.8) diventa

$$\Pi(z) = \pi_0 B(z) + \frac{1}{z}[\Pi(z) - \pi_0]A(z) \tag{1.9}$$

e, risolvendo rispetto a $\Pi(z)$,

$$\Pi(z) = \pi_0 \frac{zB(z) - A(z)}{z - A(z)} \tag{1.10}$$

4. La (1.10) contiene π_0 come incognita. Per ricavare π_0 si procede in modo standard. Si sfrutta cioè il fatto che $\Pi(z)$ è la PGF di una distribuzione per cui $\Pi(1) = 1$. Poichè per $z = 1$ il numeratore ed il denominatore della (1.10) si annullano, dobbiamo applicare il teorema dell' Hopital e fare quindi il limite per z che tende ad 1 da sinistra.

$$1 = \lim_{z \to 1-} \pi_0 \frac{zB^{(1)}(z) + B(z) - A^{(1)}(z)}{1 - A^{(1)}(z)} \tag{1.11}$$

Tenendo presente che

$$\lim_{z \to 1-} A^{(1)}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i = \lambda b = \rho \tag{1.12}$$

$$\lim_{z \to 1-} B^{(1)}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} i b_i \tag{1.13}$$

la (1.11) diventa

$$1 = \pi_0 \left[1 + \frac{1}{1-\rho} \sum_{i=1}^{\infty} i b_i \right] \tag{1.14}$$

Affinchè π_0 abbia il significato di probabilità stazionaria di zero pacchetti nel sistema (sistema scarico), nella (1.14) deve verificarsi la diseguaglianza

$$0 < \frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{\infty} i b_i < \infty \tag{1.15}$$

la quale risulta soddisfatta, ovvero il sistema in esame è stabile, se e solo se valgono le condizioni

$$\sum_{i=1}^{\infty} i b_i < \infty \tag{1.16}$$

$$\rho = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i < 1 \tag{1.17}$$

Se le (1.17) ed (1.16) sono soddisfatte, allora

$$\pi_0 = \left[1 + \frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{\infty} i b_i\right]^{-1} \tag{1.18}$$

Le (1.16) ed (1.17) hanno rispettivamente la seguente interpretazione stocastica: il sistema è stabile se e solo se

(i) il numero medio di arrivi durante il servizio di un pacchetto arrivato a sistema scarico è finito;

(ii) il numero medio di arrivi durante il servizio di un pacchetto arrivato a sistema non scarico deve essere strettamente inferiore ad uno.

Da notare che quando $a_i = b_i$, $i \in \mathrm{N}$, le due precedenti condizioni (1.16) ed (1.17) coincidono fornendo entrambe $\rho < 1$.