ESERCIZIO 1: Si consideri il sistema M/M/1 *speciale* il cui diagramma dei tassi di transizione è illustrato in Figura 1.1. Il candidato:

1. dia una possibile interpretazione degli stati *asteriscati* quando il sistema a coda modella un Internet router;

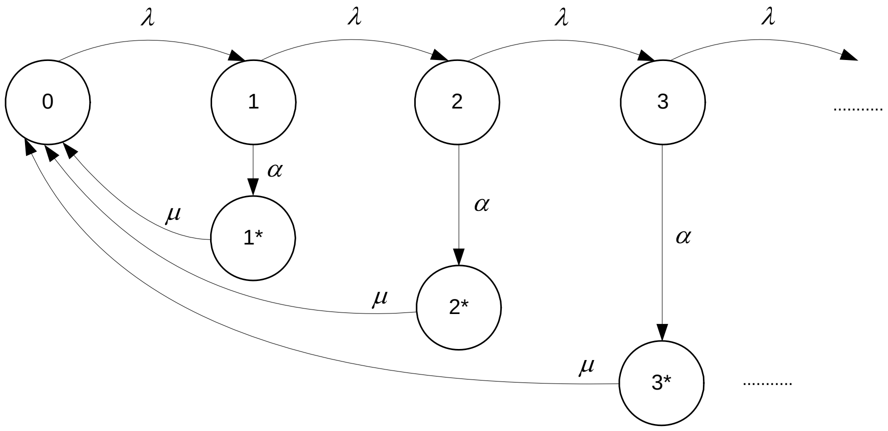

Figura 1.1: Diagramma dei tassi di transizione

2. scriva le equazioni di bilanciamento globale intorno agli stati $\{n\}$, $\forall n \geq 1$, e ricavi la relazione tra p_n e p_0;
3. scriva le equazioni di bilanciamento globale intorno agli stati asteriscati $\{n^*\}$, $\forall n^* \geq 1$, e ricavi la relazione tra p_{n^*} e p_0;
4. utilizzando i risultati dei due punti precedenti deduca la condizione di stabilità del sistema e, per un sistema stabile, ricavi le probabilità stazionarie di stato;
5. calcoli la funzione massa di probabilità del numero di pacchetti presenti nel sistema osservati dal *tagged packet* in arrivo e dal *random observer.*

Nelle domande che seguono, assumendo $\alpha = \mu$, il candidato:

6. calcoli la packet loss probability P_L ed il tasso λ_{acc} con cui i pacchetti vengono accettati dal sistema;
7. ricavi formalmente il throughput γ in funzione di λ e P_L;
8. ricavi la relazione tra l'offered load a ed il carried load a';
9. calcoli il numero medio di pacchetti nel sistema $E[N]$.

RISOLUZIONE

1. Il modello di Figura 1.1 potrebbe rappresentare un Internet router che assembla i pacchetti ricevuti in messaggi prima di trasmetterli (servirli) sulla linea di uscita.

2. Le equazioni di bilanciamento globale intorno agli stati $\{n\}$, $\forall n \geq 1$, sono

$$\begin{cases} \lambda p_0 = (\alpha + \lambda) p_1 \\ \lambda p_1 = (\alpha + \lambda) p_2 \\ \lambda p_2 = (\alpha + \lambda) p_3 \\ \quad\cdots \end{cases} \tag{1.1}$$

da cui segue, dopo alcuni passaggi algebrici

$$\begin{cases} p_1 = \left(\dfrac{\lambda}{\alpha + \lambda}\right) p_0 \\ p_2 = \left(\dfrac{\lambda}{\alpha + \lambda}\right)^2 p_0 \\ p_3 = \left(\dfrac{\lambda}{\alpha + \lambda}\right)^3 p_0 \\ \quad\cdots \end{cases} \tag{1.2}$$

In generale avremo

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\alpha + \lambda}\right)^n p_0, \ \forall n \geq 1 \tag{1.3}$$

3. Le equazioni di bilanciamento globale intorno agli stati asteriscati $\{n^*\}$, $\forall n^* \geq 1$, sono

$$\begin{cases} \alpha p_1 = \mu p_{1^*} \\ \alpha p_2 = \mu p_{2^*} \\ \quad\cdots \end{cases} \tag{1.4}$$

In generale si ha

$$\alpha p_n = \mu p_{n^*},\ \forall(n = n^* \geq 1) \qquad (1.5)$$

da cui si ricava

$$p_{n^*} = \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)p_n = \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\alpha+\lambda}\right)^n p_0,\ \forall(n = n^* \geq 1) \qquad (1.6)$$

4. Per ricavare p_0 si utilizza la condizione di normalizzazione

$$p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n + \sum_{n^*=1}^{\infty} p_{n^*} = 1 \qquad (1.7)$$

Sostituendo la (1.6) nella (1.7)

$$p_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\alpha+\lambda}\right)^n p_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\alpha+\lambda}\right)^n p_0 = 1 \qquad (1.8)$$

Se nella (1.8) accorpiamo i primi due termini ed aggiungiamo e sottraiamo $(\alpha/\mu)p_0$ si ottiene

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\alpha+\lambda}\right)^n p_0 + \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\alpha+\lambda}\right)^n - 1\right\}p_0 = 1 \qquad (1.9)$$

Poichè la seguente diseguaglianza

$$\frac{\lambda}{\alpha+\lambda} < 1 \qquad (1.10)$$

risulta sempre verificata in quanto α, per un sistema ingeneristico è maggiore di zero. Di conseguenza la serie che compare nella (1.9) converge

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\alpha+\lambda}\right)^n = \frac{\alpha+\lambda}{\alpha} \qquad (1.11)$$

Dopo alcuni passaggi algebrici sulla (1.9) si ottiene

$$p_0 = \frac{\alpha\mu}{\alpha\mu + \lambda(\alpha+\mu)} \qquad (1.12)$$

In conclusione, il sistema è sempre stabile e le probabilità stazionarie di stato sono

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{\alpha\mu}{\alpha\mu + \lambda(\alpha + \mu)} \\ \\ p_n = \left(\dfrac{\lambda}{\alpha + \lambda}\right)^n p_0 \qquad \forall n \geq 1 \\ \\ p_{n^*} = \left(\dfrac{\alpha}{\mu}\right)\left(\dfrac{\lambda}{\alpha + \lambda}\right)^{n^*} p_0 \quad \forall n^* \geq 1 \end{cases} \tag{1.13}$$

5. Nel sistema in considerazione il tasso degli arrivi λ è indipendente dallo stato del sistema per cui la distribuzione del numero di pacchetti nel sistema osservati dal *tagged packet* in arrivo e dal *random observer* coincidono. Quindi:

$$\begin{cases} r_n = p_n \qquad \forall n \in \mathrm{N} \\ r_{n^*} = p_{n^*} \quad \forall n^* \geq 1 \end{cases} \tag{1.14}$$

6. Nel caso in cui $\alpha = \mu$ le (1.13) diventano

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{\mu}{\mu + 2\lambda} \\ \\ p_n = \left(\dfrac{\lambda}{\mu + \lambda}\right)^n p_0 \quad \forall n \geq 1 \\ \\ p_{n^*} = p_n \qquad \forall (n = n^* \geq 1) \end{cases} \tag{1.15}$$

Ciò premesso, dalla Figura 1.1 segue che il sistema perde pacchetti quando si trova negli stati *asteriscati*. Quindi

$$P_L = \sum_{n^*=1}^{\infty} p_{n^*} = p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu + \lambda}\right)^n = p_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu + \lambda}\right)^n - 1\right] \tag{1.16}$$

Dopo alcuni passaggi algebrici sulla (1.16) si ottiene

$$P_L = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)p_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\mu}{\mu + 2\lambda}\right) \tag{1.17}$$

Per il calcolo di λ_{acc} basta osservare che il sistema accetta pacchetti soltanto negli stati $\{n\}$, $\forall n \geq 0$.

$$\lambda_{acc} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda p_n = \lambda\left(1 - \sum_{n^*=1}^{\infty} p_{n^*}\right) \tag{1.18}$$

Dalla (1.16) segue

$$\lambda_{acc} = \lambda(1 - P_L) \tag{1.19}$$

7. Per il calcolo del throughput γ bisogna tener conto del fatto che il sistema riceve in input pacchetti che assembla in messaggi prima di trasmetterli (servirli) sulla linea di uscita e che inoltre:

- il sistema serve i pacchetti soltanto quando si trova negli stati *asteriscati*;
- quando il sistema si trova nello stato $\{n^*\}$, con $\forall n^* \geq 1$, viene servito un messaggio contenente $\{n^*\}$ pacchetti

Dalle precedenti osservazioni segue

$$\gamma = \mu\sum_{n^*=1}^{\infty} n^* p_{n^*} = \mu p_0 \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{\lambda}{\mu + \lambda}\right)^n \tag{1.20}$$

$$= \mu p_0\left(\frac{\lambda}{\mu + \lambda}\right)\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{\lambda}{\mu + \lambda}\right)^{n-1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)p_0(\mu + \lambda) \tag{1.21}$$

Sostituendo p_0 della (1.15) nella (1.21) si ottiene

$$\gamma = \lambda_{acc} = \lambda(1 - P_L) \tag{1.22}$$

relazione che dovevamo aspettarci dal momento che il sistema in esame perde pacchetti.

8. Moltiplicando entrambi i membri della (1.22) per il tempo medio di servizio b si ottiene

$$\gamma b = \lambda b(1 - P_L) \tag{1.23}$$

Poiché

$$a = \lambda b\,,\ a' = \gamma b \tag{1.24}$$

dalla (1.23) si ottiene

$$a' = a(1 - P_L) \tag{1.25}$$

9. Per calcolare $E[N]$ bisogna tener conto che per gli stati $\{n \geq 1\}$ ed $\{n^* \geq 1\}$ il numero di pacchetti nel sistema è lo stesso. Di conseguenza

$$\begin{aligned} E[N] &= \sum_{n=1}^{\infty} np_n + \sum_{n^*=1}^{\infty} n^* p_{n^*} = 2\sum_{n=1}^{\infty} np_n \\ &= 2p_0 \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^n = 2p_0\left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^{n-1} \end{aligned} \tag{1.26}$$

Sostituendo p_0 della (1.15) nella (1.26) dopo alcuni passaggi algebrici si ottiene

$$E[N] = 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu+2\lambda}\right) \tag{1.27}$$