ESERCIZIO 1: Si consideri un sistema M/M/1 a memoria finita nel quale arrivano messaggi ad un tasso λ costante, indipendente cioè dallo stato del sistema. Ogni messaggio trasporta due pacchetti ciascuno dei quali viene servito con un tasso μ anch'esso costante. Supponiamo che il sistema abbia memoria sufficiente per accettare soltanto un messaggio per volta. In altri termini, se arriva un messaggio mentre nel sistema vi è anche un solo pacchetto, il messaggio viene scartato. Lo stato del sistema viene descritto dal numero di pacchetti $k \in N$ contenuti nel sistema stesso. Il candidato:

1. disegni il diagramma dei tassi di transizione ed una possibile traiettoria del processo $\{N(t), t \geq 0\}$, dove $N(t)$ rappresenta il numero di pacchetti nel sistema al tempo t;
2. dica se per il sistema in esame vale il teorema di Burke;
3. scriva le equazioni di bilanciamento globale, ricavi le probabilità stazionarie di stato p_k, con $k \in \{0, 1, 2\}$, ed il numero medio di pacchetti nel sistema $(E[N])$;
4. ricavi la probabilità che il sistema non accetti un messaggio in arrivo (P_L) e, partendo da questa, ricavi il numero medio di pacchetti accettati nel sistema λ_{acc} nell'unità di tempo;
5. ricavi il throughput (γ) del sistema misurato in pacchetti serviti nell'unità di tempo;
6. scriva la z-transform $P(z) = \sum_{k=0}^{2} p_k z^k$ del numero di pacchetti presenti nel sistema e, partendo da questa, ricavi il numero medio $(E[N])$ e la varianza (σ_N^2) del numero di pacchetti contenuti nel sistema stesso.

RISOLUZIONE

1. Il diagramma dei tassi di transizione è riportato in Figura 1.1 mentre una possibile traiettoria del processo $\{N(t), t \geq 0\}$ è riportato in Figura 1.2. Come si evince dalla Figura 1.2 la traiettoria del processo può subire un incremento di due unità soltanto a sistema scarico (istanti t_1 e t_4). Negli istanti t_2 e t_5 il primo pacchetto del messaggio lascia il sistema mentre in corrispondenza degli istanti t_3 e t_6 l'altro pacchetto che compone il messaggio lascia il sistema che perciò rimane scarico.

2. Poichèla traiettoria del processo $\{N(t), t \geq 0\}$ può subire incrementi di due unita', per il sistema in esame non vale il teorema di Burke. Di conseguenza la distribuzione $\{r_k\}$ del numero di pacchetti nel sistema osservata da

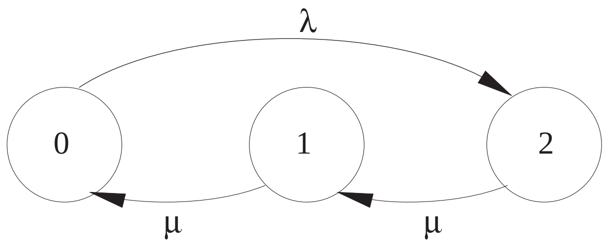

Figura 1.1: Diagramma dei tassi di transizione

un pacchetto in arrivo è diversa dalla distribuzione $\{\pi_k\}$ osservata da un pacchetto che lascia il sistema dopo essere stato servito.

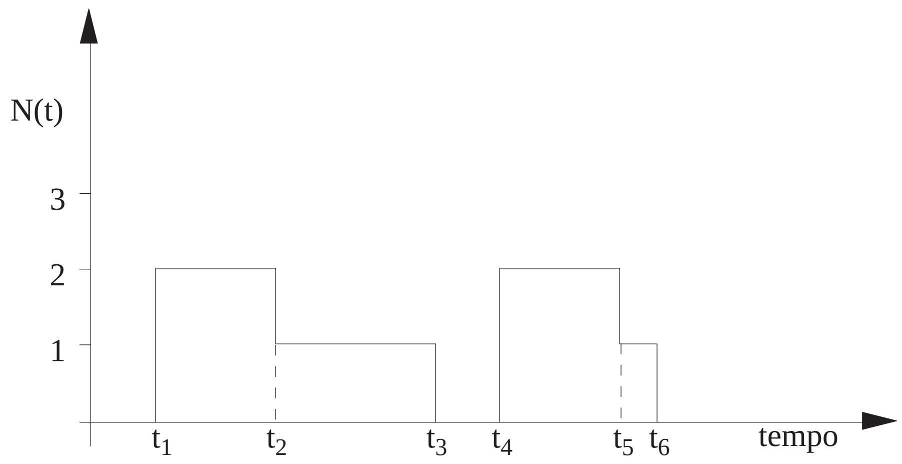

Figura 1.2: Possibile realizzazione del processo $\{N(t), t \geq 0\}$

3. Ispezionando il diagramma di Figura 1.1 èpossibile scrivere direttamente le equazioni di bilanciamento globale

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ \mu p_1 = \mu p_2 \\ \lambda p_0 = \mu p_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

alle quali va aggiunta la condizione di normalizzazione

$$p_0 + p_1 + p_2 = 1 \tag{1.2}$$

Come sappiamo dalla teoria delle code, le equazioni del sistema (1.1) sono dipendenti cosicchè una di esse può essere sostituita (ad esempio la terza equazione) dalla condizione di normalizzazione. Dopo brevi passaggi algebrici otteniamo

$$p_0 = \frac{1}{1+\rho} \tag{1.3}$$

$$p_1 = p_2 = \frac{\rho/2}{1+\rho} \tag{1.4}$$

dove

$$\rho = \frac{2\lambda}{\mu} \tag{1.5}$$

Per calcolare $E[N]$ si parte dalla sua definizione

$$E[N] = 1p_1 + 2p_2 \tag{1.6}$$

Sostituendo le (1.4) nella (1.6) si ottiene

$$E[N] = \frac{(3/2)\rho}{1+\rho} \tag{1.7}$$

4. Il sistema non accetta messaggi in arrivo quando si trova o nello stato $\{1\}$ oppure nello stato $\{2\}$. Di conseguenza

$$P_L = p_1 + p_2 \tag{1.8}$$

Sostituendo le (1.4) nella (1.8)

$$P_L = \frac{\rho}{1+\rho} \tag{1.9}$$

Poichèciascun messaggio viene accettato nel sistema con probabilità$1-P_L$, il tasso dei messaggi accettati nel sistema risulta $\lambda(1-P_L)$. Tenendo infine conto che ciascun messaggio trasporta due pacchetti, il tasso di accettazione λ_{acc} dei pacchetti da parte del sistema risulta

$$\lambda_{acc} = 2\lambda(1-P_L) \tag{1.10}$$

Sostituendo la (1.9) nella (1.10)

$$\lambda_{acc} = \frac{2\lambda}{1+\rho} \tag{1.11}$$

5. Il throughput γ del sistema misurato in pacchetti nell' unitàdi tempo si calcola partendo dalla sua definizione

$$\gamma = \sum_{n=1}^{2} \mu_n p_n = \mu \sum_{n=1}^{2} p_n = \mu(1-p_0) \tag{1.12}$$

Sostituendo la (1.3) nella (1.12) e tenendo conto della (1.5) si ottiene

$$\gamma = \frac{2\lambda}{1+\rho} \tag{1.13}$$

La (1.13) coincide con la (1.11), ossia il throughput coincide con il tasso dei pacchetti accettati dal sistema, fatto questo prevedibile in quanto i pacchetti che vengono accettati dal sistema con un certo tasso, all' equilibrio statistico lasceranno il sistema con lo stesso tasso.

6. Sostituendo la (1.3) e le (1.4) in $P(z) = \sum_{k=0}^{2} p_k z^k$ si ottiene

$$P(z) = \frac{1}{1+\rho} + \frac{\rho/2}{1+\rho} z + \frac{\rho/2}{1+\rho} z^2 \tag{1.14}$$

Sfruttando le proprietàdelle z-transform si ottiene nell' ordine

$$E[N] = \frac{d}{dz} P(z)\bigg|_{z=1} = \frac{\rho/2}{1+\rho} + \frac{\rho/2}{1+\rho} 2z\bigg|_{z=1} = \frac{(3/2)\rho}{1+\rho} \tag{1.15}$$

$$E[N^2] - E[N] = \frac{d^2}{dz^2} P(z)\bigg|_{z=1} = \frac{\rho}{1+\rho} \tag{1.16}$$

La (1.15) ovviamente coincide con la (1.7). Sostituendo la (1.7) nella (1.16) si ottiene

$$E[N^2] = \frac{(5/2)\rho}{1+\rho} \tag{1.17}$$

Sfruttando la definizione di varianza, la (1.7) e la (1.17)

$$\sigma_N^2 = E[N^2] - (E[N])^2 = \frac{\rho}{4(1+\rho)^2}(10+\rho) \tag{1.18}$$