ESERCIZIO 1: Il protocollo IP di un Host Internet riceve con tasso poissoniano λ, dalla sottorete su cui risiede, pacchetti che deve riassemblare in datagrams per poi inoltrarli al protocollo TCP con tasso esponenziale μ. Ciascun datagram contiene un numero aleatorio n $\{n = 1, 2, 3, \ldots\}$ di pacchetti e supponiamo che il diagramma dei tassi di transizione del sistema a coda con cui il processo di riassemblaggio del protocollo IP viene modellato sia rappresentato in Figura 1.1. Il candidato:

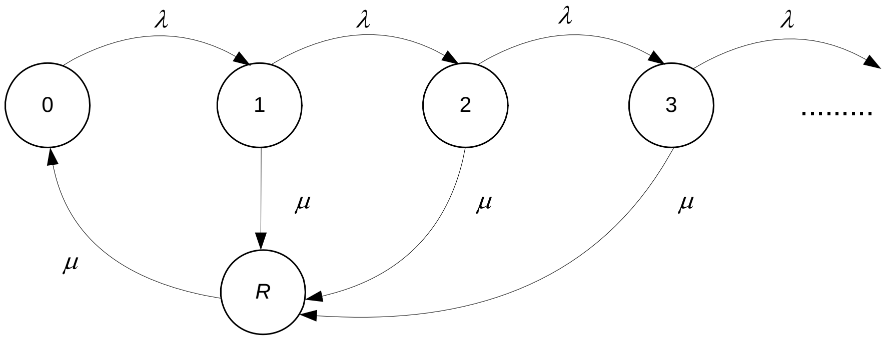

Figura 1.1: Diagramma dei tassi di transizione

1. fornisca una interpretazione delle transizioni $\{n = 1, 2, 3, \ldots\} \to \{R\}$;
2. scriva le equazioni di bilanciamento globale relativamente agli stati $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ed esprima p_R e p_n, $\forall n \geq 1$, in funzione di p_0;
3. utilizzando le equazioni del punto 2 precedente deduca la regione di stabilità del sistema ed in tale regione ricavi le probabilità stazionarie di stato;
4. calcoli la funzione massa di probabilità del numero di pacchetti presenti nel sistema osservati dal *tagged packet* in arrivo e dal *random observer*;
5. ricavi la probabilità P_L che un pacchetto in arrivo venga scartato, calcoli il tasso $\lambda_{acc}^{(pacchetto)}$ con cui i pacchetti vengono accettati nel sistema ed esprima $\lambda_{acc}^{(pacchetto)}$ in funzione di λ e P_L;
6. calcoli il numero medio di pacchetti nel sistema $E[N]$.

RISOLUZIONE

1. Il protocollo IP, per poter riassemblare un pacchetto relativo al datagram cui appartiene analizza i campi di controllo dell'intestazione del pacchetto medesimo per poi prendere le necessarie iniziative. Per esempio, il protocollo IP dovrà controllare, mediante il checksum, se i campi dell'intestazione del pacchetto IP sono stati ricevuti correttamente.

Tali controlli richiedono un tempo di elaborazione che, nel caso in esame, è stato assunto esponenziale con tasso μ. Inoltre, dal diagramma dei tassi di transizione emerge che durante lo svolgimento delle suddette funzioni, se arriva un nuovo pacchetto, esso viene scartato.

2. Facendo riferimento alla Figura 1.1 si può scrivere agevolmente

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_R \\ \lambda p_0 = (\lambda + \mu) p_1 \\ \lambda p_1 = (\lambda + \mu) p_2 \\ \lambda p_2 = (\lambda + \mu) p_3 \\ \dots \\ \lambda p_n = (\lambda + \mu) p_{n+1} \\ \dots \end{cases} \tag{1.1}$$

Ponendo $\rho = \lambda/\mu$, dopo semplici passaggi algebrici sul sistema lineare (1.1) si ottiene

$$
\begin{cases}
p_R = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_0 = \rho p_0 \\
p_1 = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right) p_0 = \left(\frac{\rho}{1 + \rho}\right) p_0 \\
p_2 = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right) p_1 = \left(\frac{\rho}{1 + \rho}\right) p_1 = \left(\frac{\rho}{1 + \rho}\right)^2 p_0 \\
p_3 = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right) p_2 = \left(\frac{\rho}{1 + \rho}\right) p_2 = \left(\frac{\rho}{1 + \rho}\right)^3 p_0 \\
\dots \\
p_n = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right) p_{n-1} = \left(\frac{\rho}{1 + \rho}\right) p_{n-1} = \left(\frac{\rho}{1 + \rho}\right)^n p_0 \qquad \forall n \geq 1
\end{cases} \tag{1.2}
$$

3. Per ricavare p_0 si impone la condizione di normalizzazione.

$$
p_R + p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1 \tag{1.3}
$$

Utilizzando i risultati (1.2), la (1.3) può essere sviluppata come segue

$$
p_0\left[\rho + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{1 + \rho}\right)^n\right] = 1
$$

$$
p_0\left[\rho + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{1 + \rho}\right)^n\right] = 1 \tag{1.4}
$$

Poiché $\rho / (1 + \rho)$ è sempre minore di 1, la serie nella (1.4) converge

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{1 + \rho}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{\rho}{1 + \rho}} \tag{1.5}
$$

per cui il sistema è sempre stabile. Sostituendo la (1.5) nella (1.4), dopo alcuni passaggi algebrici si ottiene

$$p_0 = \frac{1}{1+2\rho} \tag{1.6}$$

In conclusione, i risultati (1.6) e (1.2) possono essere così sintetizzati

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{1}{1+2\rho} \\ \\ p_R = \rho p_0 \\ \\ p_n = \left(\dfrac{\rho}{1+\rho}\right)^n p_0 \qquad \forall n \geq 1 \end{cases} \tag{1.7}$$

4. Nel sistema in considerazione il tasso degli arrivi λ è indipendente dallo stato del sistema per cui la distribuzione del numero di pacchetti nel sistema osservati dal *tagged packet* in arrivo e dal *random observer* coincidono. Quindi:

$$\begin{cases} r_n = p_n \qquad \forall n \in \mathrm{N} \\ r_R = p_R \end{cases} \tag{1.8}$$

5. Il sistema scarta pacchetti quando si trova nello stato $\{R\}$. Quindi

$$P_L = P_R \tag{1.9}$$

Sostituendo (1.7) in (1.9)

$$P_L = \frac{\rho}{1+2\rho} \tag{1.10}$$

Per quanto concerne il calcolo di $\lambda_{acc}^{(pacchetto)}$ basta osservare che il sistema accetta pacchetti quando si trova negli stati $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ per cui

$$\lambda_{acc}^{(pacchetto)} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} p_n = \lambda(1 - P_R) \tag{1.11}$$

Utilizzando il risultato (1.9) la (1.11) può essere riscritta come segue

$$\lambda_{acc}^{(pacchetto)} = \lambda(1 - P_L) \tag{1.12}$$

NOTA. Potevamo pervenire al risultato (1.12) sostituendo (1.7) in (1.11)

$$\lambda_{acc}^{(pacchetto)} = \lambda p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^n = \lambda p_0 (1+\rho) \tag{1.13}$$

Sostituendo poi p_0 della (1.7) in (1.13)

$$\lambda_{acc}^{(pacchetto)} = \lambda\left(\frac{1+\rho}{1+2\rho}\right) \tag{1.14}$$

La (1.14) può essere riscritta

$$\lambda_{acc}^{(pacchetto)} = \lambda\left(1 - \frac{\rho}{1+2\rho}\right) \tag{1.15}$$

Tenendo conto della (1.10), la (1.15) può essere riscritta

$$\lambda_{acc}^{(pacchetto)} = \lambda(1 - P_L) \tag{1.16}$$

6. Per calcolare il numero medio di pacchetti nel sistema $E[N]$ si parte dalla relativa definizione

$$E[N] = \sum_{n=1}^{\infty} np_n + p_R\left(\sum_{n=1}^{\infty} np_n\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} np_n\right)(1 + p_R) \tag{1.17}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} np_n = p_0\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{n-1} = p_0\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)\frac{1}{\left(1 - \frac{\rho}{1+\rho}\right)^2} \tag{1.18}$$

La (1.18), dopo alcuni sviluppi, consente di ricavare

$$\sum_{n=1}^{\infty} np_n = \rho\left(\frac{1+\rho}{1+2\rho}\right) \tag{1.19}$$

Sostituendo la (1.19) nella (1.17) e tenendo conto della p_R riportata in (1.7) si ottiene

$$E[N] = \frac{(1+\rho)(1+3\rho)}{(1+2\rho)^2} \tag{1.20}$$